

PARADOX VESNICKÉHO VÝČEPNÍHO¹

Jiří Raclavský

I.

Dovolím si reformulovat znění slavného paradoxu vesnického holiče tak, aby „kulisy“ paradoxu byly pro současné posluchače o něco názornější:

Vesnický výčepní točí pivo všem těm, kdo netočí pivo sami sobě.

Při drobném zamyšlení se mnozí dostanou myšlenkově do úzkých a dospějí k úvahám, které naformuloval i sám Russell:

ten výčepní si netočí, jestliže si točí

a na druhou stranu:

ten výčepní si točí, jestliže si netočí

A máme tu paradox, daná věta je podivně vadná, což je nám zřejmé zvláště po otázce „Točí ten výčepní sám sobě?“. Paradoxu jsou něčím pro lidskou mysl nesmírně drásavým. (Zvláště sužují logiky.) Tak je také zjevné, že neradno na výletech vesnickým výčepním navrhnout otázky jako tuto, mohlo by se snadno stát, že vesnický výčepní se vytočí...

Daná dvojice vět představuje kontradikci, Russell jako kontradikci označoval i jiné paradoxu. Sám uvedl² paradox vesnického holiče jako příklad mnoha dalších paradoxů a všem jim vytkl následující rysy:

– kruhovou sebe-referenci

– to, že je tu diskutován nějaký totál a přitom ten má být prvkem sebe sama

a evokuje (tzv. sémantický) paradox lháře ve variantě:

Krétan Epimenidés: Všichni Krétané jsou lháři.

a její zrovna tak známé (a to také již od antiky) obměny:

Já lžu.

resp. (Eubulidův paradox):

Tato věta je nepravdivá.

¹ Text je písemnou verzí příspěvku na konferenci „Přispělo jídlo a pití k evropské vzdělanosti?“ (Brno, 12.3. 2007).

² Jistou matematickou obdobu objevil Bertrand Russell již v červnu 1901, jde o tzv. Russellův paradox (ten ve skutečnosti není analogický s paradoxem holiče). Paradox vesnického holiče se Russellovi sice přisuzuje, nicméně nikdo mně známý neuvádí pro toto přesvědčivý zdroj. (Znamé Russellovo pojednání o paradoxech je „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types“, 1908, *American Journal of Mathematics* 30, 3, 222-262.)

Kdyby ta věta měla být pravdivá, říká nám Russell, tak by mělo být pravdivé to, co říká, tedy že je nepravdivá, což si protirečí; analogicky pro to, kdyby měla být nepravdivá.

Russell sám (prý) naformuloval paradox vesnického holiče jako pregnantní variantu (tzv. množinových) paradoxů, které se objevily v prostředí teorie množin, jež se na konci 19. století zdála být vhodným sjednotitelem rozličných okruhů matematických bádání, ovšem množinové paradoxy udělali této naději načas přítrž; mnohé z oněch paradoxů se zdály být jako z dosti vzdálených krajín matematiky, proto byla důležitá jednoduchá formulace, která matematikům ukázala, jak vážný je to problém a že je ho třeba od podlahy řešit.

Sir Bertrand Russell byl velmi vzdělaný muž a já si dovolím předložit hypotézu, proč sám naformuloval paradox ve svém znění. Jeden z příkladů, které Russell během své filosofické kariéry hojně diskutoval, byl příklad Jiřího IV., který zjišťoval, kdo napsal román *Waverley*. Předpokládáme-li, že Jiří IV. onen román četl, chce se nám říci, že je pošetilé chtít vědět, kdo to napsal, protože jméno „Walter Scott“ by jistě bylo uvedeno v knize v místě, kam se jméno autora píše – jenže místo tohoto tam stojí deskripce „*autor Waverley*“. Dalším proslaveným Russellovým příkladem je *král Francie*. Napadá nás, že britský gentleman zde možná překročil hranice jemného anglického humoru, když si uvědomíme poněkud znevažující pohled Angličanů na „žabožrouty“, a fakt, že jsou (a byli v době vzniku příkladu) bez krále, by byl jen další pichlavostí. Ovšem celý příklad zní „*Král Francie je holohlavý*“. Proč zrovna „holohlavý“? (Zase nějaká jízlivost?) Proč ne třeba „šlechtic“ nebo třeba „Bourbon“?

Dospěl jsem k hypotéze, že Russell obrazně evokuje proslulou metodickou poučku zvanou *Ockhamova břitva*:

Nepřipouštějme více entit než je nezbytné.

kterou na své středověké kolegy (mnohdy připouštějící pro vysvětlení relativně jednoduchého jevu existenci bůhvíjakých fantaskních jsoucen) uplatňoval nominalista Vilém Ockham (1287-1348). Karl Menger (1902-1985) ji mírně modifikoval na tzv. *Mengerův hřeben*:

Nepřipouštějme méně entit než je nezbytné.

Oba principy jsou přitom dvě strany jedné mince. A z hlediska výkladu Russellova příkladu, je zřejmé, že „kulisami“ jsou holičské záležitosti, takže paradox vesnického holiče zní:

Vesnický holič v Tombstone holí všechny ty, co neholí sami sebe. (Holí sám sebe?)

Dodejme, že ani jméno oné vesnice se nejeví jako náhodné – slovo „tombstone“ znamená v angličtině „náhrobek“, přičemž Russell bezpochyby věděl o náhrobku Fileta z Kosu (hluboká antika), který si na svůj náhrobek nechal vytesat, že těžké noci, které trávil lámáním si hlavy nad paradoxem lháře, zapříčinily jeho smrt.

Samozřejmě můžeme paradox vesnického holiče uvést ve „francouzské“ variantě, tedy:

Král Francie holí hlavu všem Francouzům, co neholí hlavu sami sobě.

Podstata paradoxu vesnického holiče však zůstává, jen tu máme navíc problém s tím, že nikdo není králem Francie, kdežto v příkladu s Tombstone se v zadání existence nějakého holiče předpokládá. (Je zřejmé, že po vyholení hlavy břitvou už není potřeba hřeben, je také zřejmé, že češete-li si vlasy hřebenem, nelze ji zároveň holit – ty dva principy jsou i takto dvě strany jedné mince.) A ještě „francouzská verze“ k variantě vesnického výčepního:

*Král Francie nalévá bourbony všem Francouzům, co nenalévají bourbon sami sobě.*³

Pro odvážné je tu sekce II., kde odhalíme tři různé významy slovesa „točit (něco někomu)“ a rozluštíme, co paradox plodící věta vlastně chtěla říci.

II.

Co je divného na vesnickém výčepním/holiči? Je to stejný paradox jako paradox lhářský? Jako znalec sémantických paradoxů (tj. Lhář a spol.) tvrdím, že ne.⁴ Taky tvrdím, že paradox vesnického výčepního/holiče neřeší Russellem navržená teorie typů, ať už jde o tzv.:

jednoduchou teorii typů

neboť ta vlastně říká, že funkce (ve smyslu zobrazení) nesmí být sama svou hodnotu (či argumentem), anebo o tzv.:

rozvětvenou teorii typů (vlastně spíš: řádů)

kteří říká, že hodnotou třeba proměnné x nesmí být samo x (coby procedura), ale něco z nižšího řádu. Považuji též za chybné, když Russell tvrdí, že žádný totál nesmí „obsahovat“ sám sebe. Následující vysvětlení ale bude podáno i pro filosofické neprofesionály, byť to neznamená, že se z toho člověku přece jen poněkud nezatočí hlava.⁵

Věci si trochu zjednodušíme tím, že budeme ignorovat:

a) v které že přesně to má být vesnici

³ Logikové jsou „hravá individua“. Tuhle „král Francie“, tamhle „jednorožec“, jinde „Pegas“, „Jitřenka/Večernice“ (Frege!), „špión“ (Quine), atd. Obraznost příkladů nic nemění na závažnosti jejich zkoumání.

⁴ A nejsem sám, kdo si to myslí – H.B. Curry ho nazývá „pseudoparadoxem“, ostatní mu říkají prostě kontradikce, přičemž paradoxy jako Lháře slovem „kontradikce“ neoznačují.

⁵ Zvláštní je, že jsem nikde nenarazil na řešení tohoto hlavolamu. Mně známí komentátoři předkládají formalizaci v predikátové logice, přičemž ta jejich formule je skutečně kontradikcí (místo implikace používají ekvivalenci a x vážou existenčním kvantifikátorem, tj. „alespoň jeden x “). Vesnického holiče ale přece jde korektně nadefinovat (není třeba mu navrhopvat např. vystěhování z vesnice). Neboli níže ukáži, co chtěla naše problematická věta vlastně vyjádřit a proč to na ní není patrné.

b) že výčepní točí něco, jmenovitě pivo

c) že by bylo snad záhodno naformulovat tzv. určitou deskripci, tj. něco splnitelného pouze jedinou osobou (toto mj. není zas taj nutné, klidně můžeme chtít definovat třídu osob, co čepují pivo, jak to vlastně děláme níže). Všechny tyto věci lze bezproblémově zavést do našeho řešení.

To, co nám kmitne v hlavě, když se nás někdo zeptá „Točí ten vesnický výčepní, co točí těm všem, co netočí (pivo) sobě, pivo sám sobě?“ je, že tu je *cosi, co je vesnickým výčepním*, což má být takovým, že *on točí těm všem, co netočí pivo sami sobě, pivo*. Neboli, že si pohráváme s definicí:

x , které je vesnickým výčepním $=_{df} (...x...)$

Symbol x budeme považovat za „jméno“ blíže nespécifikovaného individua (jedince), říkáme též, že to (či nějaké jiné, proto „nespécifikované“) individuum je hodnotou proměnné x . Tomu nalevo od $=_{df}$ v definici říkáme „definiendum“, tomu napravo „definiens“. (Tzv. objektuální) definice pak spočívá v tom, že to individuum (ta hodnota x), která splní definiční podmínku-definiens, splňuje i definiendum, tj. (... x ...). Když chceme definovat vesnického výčepního, musíme vhodně namyslet tu podmínku napravo. Nedopustíme se žádné velké chyby (srov. ale níže naši poznámku o ekvivalenci), když to podáme jako:

točí pivo všem těm, kdo netočí pivo sami sobě

což budeme chápat jako implikaci:

x točí pivo všem y , jestliže y netočí pivo sami sobě

pro jednoduchost si však přehodíme část s „jestliže“ dopředu, ovšem „všem“ pak musíme dát taky dopředu („točit sami sobě“ je zjevně „ y točí y “):

pro všechna y , jestliže y netočí pivo y , pak x točí pivo y

Je jistě zřejmé, že rozmanitá individua jsou hodnotami y . Může se ovšem stát, že hodnotou y je totéž, co hodnotou x . Tak jako někdo může být hodnotou x i y v „ x má rád y “, přičemž má třeba rád i sebe (anebo číslo 8 klidně může být hodnotou x i y pro případ „ $x+y=z$ “). Těm různým dvojicím individuí Pepa-Pavel, Pavel-Pepa, Pepa-Pepa, Pavel-Pavel, atd., se říká valuační-ohodnocení a při kontrole naší definice budeme prošetřovat různá taková ohodnocení.

Slovo všechna nám velí projít všechny hodnoty pro y ; pro x takovýto povel explicitně dán nemáme, on je dán implicitně pro celou definici. Velkým písmenem V budeme značit Václava, individuum, které v naší vesnici stojí za výčepním pultem, písmenem H zas Honzu, který nám bude zastupovat jakéhokoli návštěvníka, který se chce občerstvit (mohli bychom prošetřovat H_1, \dots, H_n , ale jeden arbitrární host nám pro kontroly adekvátnosti definice stačí).

Pro jednoduchost vypisujeme sloveso kapitálkami (a teď už opravdu bez piva):

vesnický výčepní x =_{af} pro všechna y, jestliže y NETOČÍ y, tak x TOČÍ y

Uvažme, že H je hodnotou y a V je hodnotou x, tedy:

H H V H

Pokud H sedí za stolem, netočí si, „jestliže ...“ – tedy antecedent, je pravdivý:

ano

Nyní V nám může dělat dvě věci. Začneme tím, že tomu H vskutku točí:

ano

Celá ta implikace („jestliže ..., pak ...“) by byla při takovémto ohodnocení pravdivá, jak jsme chtěli. Háček je v tom, když V netočí:

ne

protože v tom případě je celá ta implikace nepravdivá. Člověk by řekl, že V selhal a protože se zachoval jako ten, kdo nám nechce každého H občerstvit pivem, nesplní onu definiční podmínkou a z kandidatury na vesnického výčepního je stažen (takže nejenže V zlobí, nejenže H se zlobí, tento V se ani nestane vesnickým výčepním). Podmínku splní jen ten V, který každého H obslouží. Katastrofa však nastane, pokud se hodnotami x i y stane sám V (opakujeme definici):

vesnický výčepní x =_{af} pro všechna y, jestliže y NETOČÍ y, tak x TOČÍ y

Jestliže si V netočí, antecedent je pravdivý:

V V

ano

měl by proto tento V (coby hodnota x) tomu, kdo je hodnotou y natočit; to se ale logicky vylučuje, neboť hodnotou y je sám V (nelze něco dělat a zároveň nedělat), proto:

V V

ne

Čili konsekvent implikace je nepravdivý a celá implikace nepravdivá. To sice znamená, že V není kandidátem na vesnického výčepního, což ale není tak dramatické jako odvození *absurdního závěru, že V si netočí, jestliže si V točí*. Osobně říkám podmínkám takového typu „nesplnitelné podmínky“ (většinou narážím „nesplnitelné deskripce“); obecně „být takové x, že jestliže x je F, tak x není F“ (kde F je libovolná vlastnost). Na druhou stranu, jestliže si ve výchozí situaci, v antecedentu, náš V točí, tak by si (konsekvent) točit neměl, či přesněji si netočí, což je *opět absurdní*:

V V V V

ne

ano

kvůli tomu, že si točí, jestliže si netočí. A tenhle ten V nám v tomto případě, zdá se, ještě splní celou podmínku (pokud ovšem obsluhuje všechny hosty H) danou implikací. Takže se stává vesnickým výčepním, řekl by někdo. To by byl ovšem unáhlený závěr – definice musí být splněna pro jakoukoli hodnotu x , jenže to se nám v předchozím prošetřovaném případě „ano-ne“ nestalo.

Někdo by myslel, že by nám tady pomohlo, kdybychom namísto implikace („jestliže, pak“) dali ekvivalenci („právě tehdy, když“):

vesnický výčepní $x =_{af}$ pro všechna y , y NETOČÍ y právě tehdy, když x TOČÍ y

Ekvivalence má totiž tu vlastnost, že je nepravdivá nejenom pro případ, kdy dílčí výroky jsou „ano-ne“ (v tomto pořadí) jako implikace, ale i pro případ kombinace „ne-ano“.⁶ Tou ekvivalencí by jsme si ale pomohli jen zdánlivě – takových jednotlivých V (potencionálně H), kteří si zafigurují jako hodnoty x i y je totiž nečítaně, neboli nikdo nesplní celkovou podmínku, nemůže se proto stát tím vesnickým holičem. Pro názornou doplňující představu, je to jako když libovolný H, který se zpočátku sám neobsluhoval, si natruc pivo natočí, tj. točí si tehdy, když si netočí.

Stručně (pro implikaci i ekvivalenci): *nikdo* (ani Václav, ani Honza, ani Pavel, atd.) *se při takovéto definici nemůže stát vesnickým výčepním*. Pozor: skutečně tu nejde o to, že jinak vzorně hostům čepující V si tu tam natočí něco pro sebe – tahleta představa je totiž zdrojem akceptace té dosavadní chybné definice. My ale neřešíme, co kdo ve světě doopravdy dělá (to co známe z praxe), my řešíme naše pojmové (definiční) uchopení toho, co se děje; a tady je třeba přesnost.

Tato poznámka je významnější, než by se mohla jevit na první pohled. Jedna věc je definice a druhá věc je, na co jsme navyklí z naší zkušenosti.⁷ Jistě není úkolem definovat něco, co nemá obdobu v realitě. Jenže právě toto jsme naší definicí při nekritické reflexi, toho, co z až příliš důvěrné zkušenosti známe, udělali – udělali jsme definici, která žádného reálného výčepního nepokrývá. Musíme proto jasně odlišit to, že a) výčepní točí všem ostatním a to, kdy b) točí všem ostatním a taky, pokud chce, občas i sám sobě. Zaměřme se zpočátku na definiční vyjádření případu a). Podstatné je vyhnout se „ x točí y “, což dovoluje, aby individuum bylo hodnotou obou proměnných. Uděláme to tak, že připojíme, na základě konjunkce (česky „a“, „a zároveň“, „avšak“, „ale“), podmínku, že x je odlišný od y , tedy

⁶ (Odborníkům neřešíme tu ani (subjunktivní) kondicionály, ani žádné tzv. paradoxy implikace. Pro náš příklad je zcela legální materiální implikace, popř. obousměrná (\leftrightarrow)).

⁷ Inverzní analogie: jdeme-li do výtvarného kroužku nakreslit (jednoduchou) židli, máme značnou tendenci ji nakreslit se čtvercovým sedákem, když víme, že má sedák čtvercový. To, co však před námi vidíme, není čtverec, ale – díky perspektivě – jakýsi zkosený čtyřhran. Nejde tu o smyslový klam, chyba vzniká tím, že na základě našeho konceptuálního vědění deformujeme to, co před sebou doopravdy vidíme.

„ $x \neq y$ “ (vzájemná odlišnost); česky by se tento predikát vyjádřil „někdo točí někomu jinému než sobě“. Zkusme, jak to ovlivní pravdivost konsekventu implikace:

vesnický výčepní $x =_{df}$ *pro všechna* y , *jestliže* y *NETOČÍ* y , *tak* (x *TOČÍ* y *a* $x \neq y$)

V	V	V	V	V	V
	ne		ano		ne

Konjunktivní spojení pomocí „a“, které jsme povinni vyhodnocovat pohromadě (proto jsme vepsali závorky) dává „ano“ jedině pro dvojici „ano-ano“, takže nám konsekvent vychází „ne“. Vidíme tedy, že přidání nerovnosti zabírá – potřebovali jsme, aby pro V vyšla stejná pravdivostní hodnota jako v antecedentu (aby nám nevyšlo, že si V točí, jestliže si netočí); implikace je v tomto případě pravdivá.

Jak si čtenář ověří pro případ, kdy je antecedent „ano“, tak konsekvent naneštěstí vyjde „ne“ (V si netočí a protože je coby hodnota y totožný se sebou coby hodnotou x , „ $x \neq y$ “ je taky „ne“). Problém je, že V nám tak nesplní podmínku danou celou implikací, takže je stejně vyloučen z kandidatury na vesnického výčepního. Této závady se opět zbavíme tím, že „ $x \neq y$ “ přidáme také do antecedentu.⁸ Kontrolujeme onen rizikový případ (v antecedentu), kdy je pravda, že si netočí:

vesnický výčepní $x =_{df}$ *pro všechna* y , *jestliže* (y *NETOČÍ* y *a* $x \neq y$), *tak* (x *TOČÍ* y *a* $x \neq y$)

V	V	V	V	V	V	V	V
	ano		ne		ne		ne
		ne				ne	

Takže celá implikace je opět pravdivá. Celá definice je tedy pravdivá, neboť je pravdivá ve všech těch případech, kdy hodnota x točí všem ostatním. Definovali jsme tedy vesnického holiče? Ano. Je podle naší definice V dovoleno si natočit? Také ano. Viz vyhodnocení výše – klidně může být pravda, že V si točí, přesto V splní tu definici.⁹ Všimněme si, že to neznamená, že si můžeme z naší definice (korektně) odvodit, že V si točí, když si netočí (a naopak), toto blokují ty konjunkcemi přidané nerovnosti. Stručně: a přeci si sám točí...

Shrnujeme – zákeřnost věty:

Vesnický výčepní točí pivo všem těm, kdo netočí pivo sami sobě.

⁸ Znalejší čtenář by mohl chtít dát do antecedentu negaci „někdo točí někomu jinému“, tedy (uplatněním De Morganova zákona pro převod konjunkce na disjunkci a zákonem dvojité negace) „ x netočí y a $x \neq y$ “. Jenže to bychom dospěli k paradoxní dvojici „někdo točí někomu jinému, jestliže netočí někomu jinému“, „někdo netočí někomu jinému, jestliže točí někomu jinému“. My ale musíme dát do antecedentu jiný druh „netočení někomu jinému“, jmenovitě „někdo netočí₂ někomu jinému“ ve smyslu negace „někdo točí₂ někomu jinému“. Tento jiný predikát není na jazykové úrovni odlišitelný od predikátu, který je čistou negací predikátu z konsekventu.

⁹ Kdyby o tom někdo pochyboval, může si definici udělat explicitní tím, že přidá pomocí disjunkce (logický součet), nevylučovací „nebo“, za tu implikaci „ x točí x “.

spočívá v tom, že z ní není vidět, že a) predikát „točit“ zde nemůže být doslova ve smyslu predikátu „někdo točí někomu“, kdy je povoleno, aby osoba byla táž, ale že tu je predikát „někdo točí někomu jinému“ (což jsme rozepisovali pomocí konjunktivního přidání té nerovnosti k „točit“ v prvním smyslu), že b) kromě „někdo točí někomu jinému“ však tato věta používá predikát „někdo netočí někomu jinému“ (který jsme si rozepsali pomocí konjunktivního přidání té nerovnosti k „točit“ v prvním smyslu), který však není čistou negací predikátu „někdo točí někomu jinému“. Neboli ta věta i její význam je zcela v pořádku, jak jsme si mj. při prvním střetnutí s ní intuitivně mysleli. Problém vznikl až tím, když jsme začali (po oné otázce) uvažovat nad významem věty a vsadili jsme ji význam, který kdyby měla (a po syntaktické stránce to ta věta nezamezuje, je proto ambivalentní), šlo by o větu vždy nepravdivou (kontradiktorickou). Čili věta používá predikáty „někdo točí₂ někomu (jinému)“ a „někdo netočí₃ někomu (jinému)“, ale při rozboru tam máme tendenci vsunovat prosté „někdo točí₁ někomu“. (A mimochodem, správně by měla být ve formálním přepisu ekvivalence; naše řešení uvedené s implikací však zůstává platit.) Nejde tedy o skutečný paradox (mj. Pavel Tichý dokonce kdesi napsal, že každý paradox je jen symptom skryté chyby).¹⁰

¹⁰ Tichého Transparentní intenzionální logice a zkušenostem s její aplikací při logické (sémantické) explikaci přirozeného jazyka vděčím za to, že jsem neskončil u obvyklého „kontradiktorického“ výkladu dané věty. Aktuálně (byť s přestávkami) pracuji též na knize věnované sémantickým paradoxům, má pilotní studie věnovaná vysvětlení nejen Tichého řešení je (v předtiskové podobě) dostupná na internetu (http://www.phil.muni.cz/~raclavsk/texty/paradox_lhare.pdf).